

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой ВМ и ПИТ



Леденева Т.М.

20.03.2025

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.О.23 Линейная алгебра

1. Код и наименование специальности:

10.05.01 Компьютерная безопасность

2. Специализация:

Безопасность компьютерных систем и сетей
Математические методы защиты информации

3. Квалификация выпускника:

специалист

4. Форма обучения:

очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:

кафедра вычислительной математики и прикладных информационных технологий

6. Составители программы:

Глушакова Т.Н., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры ВМ и ПИТ

Лазарев К.П., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры ВМ и ПИТ

7. Рекомендована:

научно-методическим советом факультета ПММ 17.03.2025, протокол № 6.

8. Учебный год: 2025-2026

Семестр(ы): 2

9. Цели и задачи учебной дисциплины

Цель изучения дисциплины «Линейная алгебра» – дать студентам глубокие знания о методах, задачах и теоремах линейной алгебры, научить студентов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности.

Задача данного курса – научить студентов владеть теоретическим материалом, решать задачи, использовать методы и теоремы линейной алгебры при решении прикладных задач. В результате изучения дисциплины студенты должны знать и уметь применять на практике основные методы линейной алгебры, владеть навыками решения практических задач.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Линейная алгебра» относится к обязательной части Блока 1 программы специалитета и изучается во 2 семестре. Данный курс непосредственно связан с дисциплинами «Алгебра», «Геометрия», «Математический анализ», «Информатика».

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесённые с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-3	Способен на основании совокупности математических методов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности.	ОПК-3.4.	Умеет решать основные задачи линейной алгебры.	Знать: основные алгебраические методы Уметь: применять их на практике Владеть: навыками решения алгебраических задач
		ОПК-3.7	знает основные свойства важнейших алгебраических систем: групп, колец, полей	
		ОПК-3.8	знает основы линейной алгебры и важнейшие свойства векторных пространств над произвольными полями	
		ОПК-3.9	знает основные свойства колец многочленов над кольцами и полями	
		ОПК-3.10	знает основные свойства отображений важнейших алгебраических систем	
		ОПК-3.11	умеет производить стандартные алгебраические операции в основных числовых и конечных полях, кольцах, а также оперировать с подстановками, многочленами, матрицами, в том числе с использованием компьютерных программ	
		ОПК-3.12	умеет решать системы линейных уравнений над полями, приводить матрицы и квадратичные формы к каноническому виду	
		ОПК-3.13	умеет производить оценку качества полученных решений прикладных задач	
		ОПК-3.14	владеет методами решения стандартных алгебраических, матричных, подстановочных уравнений в алгебраических структурах	
		ОПК-3.15	владеет навыками решения типовых линейных уравнений над полем и кольцом вычетов	
		ОПК-3.16	владеет навыками решения стандартных задач в векторных пространствах и методами нахождения канонических форм линейных преобразований	

12. Объем дисциплины в зачётных единицах/часах (в соответствии с учебным планом) — 4/144.

Форма промежуточной аттестации экзамен.

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
			2 семестр
Контактная работа		68	68
в том числе:	лекции	34	34
	практические	34	34
	лабораторные	0	0
Самостоятельная работа		40	40
в том числе: курсовая работа (проект)		0	0
Форма промежуточной аттестации экзамен		36	36

Итого:	144	144
--------	-----	-----

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
1.1.	Линейное пространство над произвольным полем	Пол. Линейное пространство над произвольным полем, его простейшие свойства. Подпространство. Критерий подпространства. Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. База и ранг системы векторов. Критерий базы. Базис линейного пространства. Координаты вектора в базисе и их свойства. Размерность линейного пространства. Связь понятий базиса и размерности. Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса. Матрица перехода от одного базиса к другому. Связь координат вектора в различных базисах. Линейная оболочка векторов. Сумма и пересечение подпространств. Размерность суммы двух подпространств. Прямая сумма подпространств. Дополнительное подпространство. Линейное многообразие. Изоморфизм линейных пространств. Свойства изоморфизма. Критерий изоморфности пространств.	Линейная алгебра (КБ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11590
1.2.	Линейные операторы.	Линейный оператор. Свойства линейного оператора. Матрица линейного оператора. Линейное выражение координат образа вектора при линейном отображении. Связь матриц линейного оператора в различных базисах. Сумма операторов, произведение оператора на число, произведение операторов и соответствующие им матрицы. Образ и ядро линейного оператора. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования. Условия приведения матрицы линейного преобразования к диагональному виду. Жорданова форма матрицы линейного преобразования.	Линейная алгебра (КБ)
1.3.	Евклидово и унитарное пространства	Определение евклидова и унитарного пространства. Простейшие свойства скалярного произведения. Неравенство Коши–Буняковского. Длина (норма) вектора. Метрическое пространство. Линейно нормированное пространство. Ортогональность. Метод ортогонализации Грама–Шмидта. Построение ортогонального (ортонормированного) базиса. Ортогональная (унитарная) матрица. Матрица Грама. Ортогональное дополнение. Разложение пространства на сумму ортогональных подпространств. Задача о перпендикуляре. Сопряжённые и самосопряжённые операторы в евклидовых и унитарных пространствах. Нормальные, ортогональные и унитарные операторы в евклидовых	Линейная алгебра (КБ)

		и унитарных пространствах	
1.4.	Билинейные и квадратичные формы	Билинейные формы, их свойства и матрицы. Квадратичные формы, их свойства и матрицы. Канонический вид квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.	Линейная алгебра (КБ)
2. Практические занятия			
2.1.	Линейное пространство над произвольным полем	Поле. Линейное пространство над произвольным полем, его простейшие свойства. Подпространство. Критерий подпространства. Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. База и ранг системы векторов. Критерий базы. Базис линейного пространства. Координаты вектора в базисе и их свойства. Размерность линейного пространства. Связь понятий базиса и размерности. Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса Матрица перехода от одного базиса к другому. Связь координат вектора в различных базисах. Линейная оболочка векторов. Сумма и пересечение подпространств. Размерность суммы двух подпространств. Прямая сумма подпространств. Дополнительное подпространство. Линейное многообразие. Изоморфизм линейных пространств. Свойства изоморфизма. Критерий изоморфности пространств.	Линейная алгебра (КБ)
2.2.	Линейные операторы.	Линейный оператор. Свойства линейного оператора. Матрица линейного оператора. Линейное выражение координат образа вектора при линейном отображении. Связь матриц линейного оператора в различных базисах. Сумма операторов, произведение оператора на число, произведение операторов и соответствующие им матрицы. Образ и ядро линейного оператора. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования. Условия приведения матрицы линейного преобразования к диагональному виду. Жорданова форма матрицы линейного преобразования.	Линейная алгебра (КБ)
2.3.	Евклидово и унитарное пространства	Определение евклидова и унитарного пространства. Простейшие свойства скалярного произведения. Неравенство Коши–Буняковского. Длина (норма) вектора. Метрическое пространство. Линейно нормированное пространство. Ортогональность. Метод ортогонализации Грама–Шмидта. Построение ортогонального (ортонормированного) базиса. Ортогональная (унитарная) матрица. Матрица Грама. Ортогональное дополнение. Разложение пространства на сумму ортогональных подпространств. Задача о перпендикуляре. Сопряжённые и самосопряжённые операторы в евклидовых и унитарных пространствах. Нормальные, ортогональные и унитарные операторы в евклидовых и унитарных пространствах	Линейная алгебра (КБ)
2.4.	Билинейные и квадратичные формы	Билинейные формы, их свойства и матрицы. Квадратичные формы, их свойства и матрицы. Канонический вид квадратичной формы. Приведение	Линейная алгебра (КБ)

		квадратичной формы к каноническому виду.	
--	--	--	--

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				Всего
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	
1	Линейное пространство над произвольным полем	15	15	0	17	47
2	Линейные операторы.	8	8	0	10	26
3	Евклидово и унитарное пространства	7	7	0	9	23
4	Билинейные и квадратичные формы	4	4	0	4	12
	Итого:	34	34	0	40	108

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Аудиторные и внеаудиторные (самостоятельные) формы учебной работы студента имеют своей целью приобретение им целостной системы знаний по дисциплине «Линейная алгебра». Используя лекционный материал, учебники, дополнительную литературу, проявляя творческий подход, студент готовится к практическим занятиям, рассматривая их как дополнение, углубление, систематизацию своих теоретических знаний. Студент должен прийти в ВУЗ с пониманием того, что самостоятельное овладение знаниями является неотъемлемой частью образовательного процесса.

Изучение каждой темы следует начинать с перечня изучаемых вопросов. Они ориентируют студента, показывают, что он должен знать по данной тематике. Вопросы темы как бы накладываются на соответствующую главу избранного учебника или учебного пособия. В итоге должно быть ясным, какие разделы программы учебного курса и с какой глубиной раскрыты в данном учебном материале.

Освоение дисциплины предполагает следующие направления работы:

- изучение понятийного аппарата дисциплины;
- изучение тем самостоятельной подготовки по учебно-тематическому плану;
- работу над основной и дополнительной литературой;
- изучение вопросов для самоконтроля (самопроверки);
- самоподготовка к практическим и другим видам занятий;
- самостоятельная работа студента при подготовке к экзамену;
- самостоятельная работа студента в библиотеке;
- изучение сайтов по темам дисциплины в сети Интернет.

Проработка лекционного курса является одной из важных активных форм самостоятельной работы. Лекция преподавателя не является озвученным учебником, а представляет плод его индивидуального творчества. Он читает свой авторский курс со своей логикой, со своими теоретическими и методическими подходами. Это делает лекционный курс конкретного преподавателя индивидуально-личностным событием, которым вряд ли студенту стоит пренебрегать. Кроме того, в своих лекциях преподаватель стремится преодолеть многие недостатки, присущие опубликованным учебникам, учебным пособиям, лекционным курсам.

В создании своего авторского лекционного курса преподаватель руководствуется двумя документами – Федеральным государственным образовательным стандартом и учебной программой. Совершенно недостаточно только слушать лекции. Студенту важно понять, что лекция есть своеобразная творческая форма самостоятельной работы. Надо пытаться стать активным соучастником лекции: думать, сравнивать известное с вновь по-

лучаемыми знаниями, войти в логику изложения материала лектором, по возможности вступать с ним в мысленную полемику. Во время лекции можно задать лектору вопрос. Вопросы можно задать и во время перерыва (письменно или устно), а также после лекции или перед началом очередной. Лектор найдёт формы и способы реагирования на вопросы студентов.

Процесс освоения учебной дисциплины в течение закреплённого учебным планом периода подвергается текущему контролю, который осуществляется в следующих формах: фиксация посещения занятий, проводимых как в очном, так и дистанционном формате; проверка выполнения практических заданий; выполнение и проверка контрольных работ.

Методологические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов

Методологические рекомендации призваны помочь студентам организовать самостоятельную работу при изучении курса: с материалами лекций и семинарских занятий, литературы по общим и специальным вопросам. Самостоятельная работа студента должна опираться на сформированные навыки и умения, приобретённые во время обучения в средней школе. В ВУЗе студент должен повысить уровень самостоятельности. Составляющей компонентой его работы должно стать творчество. Работая с литературой по теме занятий, нужно делать выписки текста, содержащего характеристику или комментарии уже знакомого Вам источника. Умение работать с литературой означает научиться осмысленно пользоваться источниками. Прежде чем приступить к освоению научной литературы, рекомендуется чтение учебников и учебных пособий.

Для улучшения обработки информации очень важно устанавливать осмысленные связи, структурировать новые сведения. Изучение научной, учебной и иной литературы требует ведения рабочих записей. Форма записей может быть весьма разнообразной: простой или развёрнутый план, тезисы, цитаты, конспект.

Методические рекомендации по подготовке к экзамену

При подготовке к экзамену следует в полной мере использовать лекционный материал и академический курс учебника, рекомендованного преподавателем.

Промежуточная аттестация проводится в очном или дистанционном формате в форме экзамена по билетам, каждый из которых содержит вопросы, оценивающие уровень сформированности всех заявленных дисциплинарных компетенций. Итоговая оценка по дисциплине определяется на основе оценок, полученных в ходе текущего контроля, а также результатов ответа на вопросы экзаменационного билета.

Методические рекомендации по работе в дистанционном формате

В настоящее время актуальным становится использование электронной информационно-образовательной среды Воронежского государственного университета, реализованной в виртуальной обучающей среде Moodle. Наиболее оптимальным является обучение в формате видеоконференции с презентацией, для чего необходим заранее подготовленный преподавателем материал (хотя бы частично), с дополнительным использованием web-камеры для более детального объяснения сложных моментов. Один из немногих положительных моментов такого обучения – просмотр занятий в записи.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения студент должен выполнять все указания преподавателей по работе на LMS-платформе, своевременно подключаться к online-занятиям, соблюдать рекомендации по организации самостоятельной работы.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1.	Ильин, В. А. Линейная алгебра : учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — 6-е изд., стер. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2020. — 280 с. — ISBN 978-5-9221-0481-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/185610
2.	Курош, А. Г. Курс высшей алгебры : учебник для вузов / А. Г. Курош. — 25-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 432 с. — ISBN 978-5-507-47499-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/383849
3.	Фаддеев, Д. К. Задачи по высшей алгебре : учебник / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. — 17-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 288 с. — ISBN 978-5-8114-0427-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/210164
4.	Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре : учебное пособие для вузов / И. В. Проскуряков. — 17-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 476 с. — ISBN 978-5-8114-9921-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/397331

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
5.	Ильин В. А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / В. А. Ильин, Г. Д. Ким. — Москва : Проспект : Издательство Московского университета, 2015. — 393 с...
6.	Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. — 21-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2025. — 448 с. — ISBN 978-5-507-50839-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/480134
7.	Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры : учебник для студентов университетов / А. И. Кострикин. — Москва : Физматлит, 2009. — 271 с.
8.	Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра : учебник для студентов университетов / А. И. Кострикин. — Москва : Физматлит, 2009. — 367 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет):

№ п/п	Ресурс
9.	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета - Режим доступа: www.lib.vsu.ru
10.	Электронно-библиотечная система Лань. - Режим доступа: https://e.lanbook.com .
11.	Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» - Режим доступа: http://biblioclub.ru/
12.	Линейная алгебра МОАИС / Лазарев К. П. - Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6546

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

Самостоятельная работа обучающегося должна включать подготовку к практическим занятиям, выполнение домашних заданий. Для этого рекомендуется освоить теоретический материал соответствующих тем по конспектам лекций и презентационному материалу, размещённому на ЭО ресурсах, литературу из представленного ниже перечня, материалы с тематических ресурсов сети Интернет.

№ п/п	Источник
1.	Задачи по линейной алгебре : учебно-методическое пособие. Часть 1. Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений / Е. М. Аристова, К. П. Лазарев. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2018. — Режим доступа: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m18-256.pdf
2.	Методические указания для решения задач по курсу "Алгебра" (Линейные пространства): Для студентов 1-го курса дневн. и вечерн. отделений / Сост. Ю.В.Бондаренко, Т.Н.Глушакова, Е.С.Тихомирова. — Воронеж, 2000. — 32 с.
3.	Алгебра и геометрия (решение систем линейных уравнений, вычисление определителей): Ме-тод. указания для решения задач по курсу "Алгебра и геометрия" для студентов 1 курса дневн. и вечерн. отд-ний фак. ПММ / Сост.: Т.Н.Глушакова, Ю.В.Бондаренко. — Воронеж, 2000. — 32с.

4.	Алгебра и геометрия: Метод. указания для решения задач по курсу "Алгебра и геометрия" для студентов 1 курса дневн. и вечерн.отд-ний фак. ПММ / Сост. Ю.В.Бондаренко, Т.Н.Глушакова, Е.С.Тихомирова .— Воронеж, 2001 .— Ч. 3: Линейные пространства. - 36 с.
5.	Функции от матриц : учебное пособие для вузов : [для студентов днев. отд-ния, изуч. дисциплины "Алгебра", "Линейная алгебра"; для направлений: 01.03.02 - Приклад. математика и информатика, 01.03.03 - Механика и мат. моделирование, 01.05.01 - Фундамент. математика и механика] / Воронеж. гос. ун-т ; сост. Т.Н. Глушакова , К.П. Лазарев .— Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015 .— 23 с.
6.	Евклидовы и унитарные пространства : учебно-методическое пособие для вузов : [для студ. 1 к. днев. отд-ния фак. прикл. математики, информатики и механики, изуч. дисциплины "Алгебра" и"Линейная алгебра"; для направлений: 01.03.02 - Приклад. математика и информатика, 01.03.03 - Механика и мат. моделирование, 01.05.01 - Фундамент. математика и механика] / Т.Н. Глушакова, К.П. Лазарев, Ю.В. Бондаренко ; Воронеж. гос. ун-т .— Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015 .— 25 с.
7.	Билинейная и квадратичная формы [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие для вузов : [для студ. 1 к. всех форм обучения фак. приклад. математики, информатики и механики; для направлений: 01.03.02- Приклад. математика и информатика, 02.04.03 - Механика и мат. моделирование] / Т.Н. Глушакова, К.П. Лазарев ; Воронеж. гос. ун-т .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2016 .
8.	Руководство к решению задач по алгебре. Часть 1 / Т. Н. Глушакова, Н. Н. Удоденко, Ю. В. Бондаренко. – Воронеж, 2002. – 67 с.
9.	Руководство к решению задач по алгебре. Часть 2. Жорданова форма матрицы и жорданов базис / Н. Н. Удоденко, Т. Н. Глушакова. – Воронеж, 2003. – 43 с.
10.	Руководство к решению задач по алгебре. Часть 3. Линейные пространства / Ю. В. Бондаренко, Т. Н. Глушакова, Е. С. Тихомирова. – Воронеж, 2002. – 36 с.
11.	Руководство к решению задач по алгебре. Часть 4. Комплексные числа / Т. Н. Глушакова, И. Б. Крыжко. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2010. – 21 с.
12.	Руководство к решению задач по алгебре. Часть 5. Элементы теории многочленов / Т. Н. Глушакова, И. Б. Крыжко. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2010. – 15 с.

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Дисциплина реализуется с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. Для организации занятий рекомендован онлайн-курс Линейная алгебра КБ / Лазарев К. П. - Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: <https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6551> и другие Интернет-ресурсы, приведённые в п.15в.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, семинарского типа, организации самостоятельной работы, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации: специализированная мебель, компьютер (ноутбук) преподавателя, мультимедийное оборудование (проектор, экран, средства звуковоспроизведения), допускается использование переносного оборудования, доска меловая или маркерная.

Программное обеспечение: ОС Windows 8 (10), интернет-браузер (Google Chrome, Mozilla Firefox), ПО Adobe Reader, пакет стандартных офисных приложений для работы с документами, таблицами (MS Office, Мой Офис, Libre Office, Notepad ++ (свободное и/или бесплатное ПО), 7-zip (свободное и/или бесплатное ПО).

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Линейное пространство над произвольным полем	ОПК-3	ОПК-3.4, ОПК-3.7, ОПК-3.8, ОПК-3.12, ОПК-3.15,	Практико-ориентированные задания. Контрольная работа 1-
2.	Линейные операторы.	ОПК-3	ОПК-3.4, ОПК-3.9, ОПК-3.11, ОПК-3.12, ОПК-3.14	Практико-ориентированные задания. Контрольная работа 2
3.	Евклидово и унитарное пространства	ОПК-3	ОПК-3.4, ОПК-3.10, ОПК-3.11,	Практико-ориентированные задания. Контрольная работа 2
4.	Билинейные и квадратичные формы	ОПК-3	ОПК-3.4, ОПК-3.11, ОПК-3.12, ОПК-3.13, ОПК-3.16	Практико-ориентированные задания. Контрольная работа 2
Промежуточная аттестация форма контроля – экзамен (II семестр)				<i>Перечень вопросов. Типовые практические задания см. п. 20</i>

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Текущий контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: *практико-ориентированные задания/домашние задания, контрольная работа.*

Практико-ориентированные задания/домашние задания выполняются на каждом практическом занятии в аудитории и дома во время самоподготовки. При этом формируются знания основных алгебраических методов, умения и навыки решения алгебраических задач.

Примеры практико-ориентированных задач.

- Дана матрица $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 & 4 \\ 5 & -3 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите её базисные столбцы и выразите один из небазисных столбцов в виде линейной комбинации базисных столбцов.

- Заданы координаты векторов в некотором базисе

$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$. Проверьте, являются ли эти векторы линейно зависимыми.

- Выясните, является ли множество чётных чисел а) группой по сложению, б) группой по умножению, в) кольцом или полем относительно сложения и умножения.
- Найдите базу системы векторов $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ и выразите все векторы системы через векторы базы, если:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

5. Найти размерность суммы и пересечения подпространств L_1 и L_2 , являющихся линейными оболочками векторов $\{a_1, a_2\}$ и $\{b_1, b_2\}$: $a_1 = (1, 3, 0, 2)$, $a_2 = (1, 1, 2, 0)$, $b_1 = (2, 0, 1, 0)$, $b_2 = (1, 4, 0, 1)$.
6. Задана матрица линейного преобразования в некотором базисе $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите её характеристический многочлен.
7. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного преобразования с матрицей $\begin{pmatrix} 4 & \frac{1}{2} \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ в некотором базисе.
8. Докажите, что оператор $A(u) = (2x + 1)u'(x) - 3u(x)$ является линейным преобразованием пространства многочленов с действительными коэффициентами степени не выше двух. Найдите матрицу этого линейного преобразования в базисе $e_1 = 1, e_2 = 1 + x, e_3 = (1 + x)^2$.
9. Определите, является ли знакоопределённой квадратичная форма:
 $K = 3x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 5x_2x_3$.
10. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на систему векторов $g_1 = (1, 0, 1)$, $g_2 = (3, 1, 2)$, $g_3 = (4, 0, 2)$.
11. Для квадратичной формы $K = 5x_1^2 + 11x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - x_2x_3$ найдите канонический вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду. Выясните, является ли форма знакоопределённой.

Критерий оценивания решения задачи	Шкала оценок
Обучающийся показал полное знание программного материала; продемонстрировал владение понятийным аппаратом и терминологией; представил логически корректное решение и нашёл правильный ответ.	5 (отлично)
Обучающийся показал полное знание программного материала, умение пользоваться понятийным аппаратом, представил в целом логически корректное, но не во всех деталях аргументированное решение задачи или допустил негрубые ошибки в последовательности решения, не влияющие на реализацию метода решения.	4 (хорошо)
Обучающийся показал фрагментарное, поверхностное знание программного материала, продемонстрировал затруднения с использованием понятийного аппарата для выполнения задания. Решение задачи не завершено, но метод решения выбран верно.	3 (удовлетворительно)
Обучающийся имеет существенные пробелы в знаниях методов и подходов к решению задачи и в умениях применять их на практике. Задача не решена, метод решения не указан или выбран неверно.	2 (неудовлетворительно)

К

Контрольные работы являются важным средством проверки знаний основных алгебраических методов, умений и навыков их применения к решению задач. Контрольные работы выполняются в аудитории и состоят из нескольких заданий на различные темы.

Комплект заданий для контрольной работы №1

1. Заданы координаты векторов в некотором базисе:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}. \text{ Проверьте, являются ли эти векторы линейно зависимыми.}$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, если векторы обоих базисов заданы своими координатами:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, e'_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Докажите, что матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ образуют базис в линейном пространстве $R^{2 \times 2}$ и найдите в этом базисе координаты матрицы $X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Найти размерность пространства решений однородной системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z + t = 0, \\ 3x - 7y + 3z - t = 0, \\ x - 2y - 2t = 0. \end{cases}$$

5. Даны координаты векторов:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}; b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}. \text{ Линейные оболочки векторов } \{a_1, a_2, a_3\} \text{ и } \{b_1, b_2, b_3\} \text{ образуют подпространства } L_1 \text{ и } L_2 \text{ соответственно. Найдите базисы суммы } L_1 + L_2 \text{ и пересечения } L_1 \cap L_2.$$

Комплект заданий для контрольной работы №2

1. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного преобразования с матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ в некотором базисе.
2. Покажите, что оператор $A(u) = (x+1)u'(x) + 2u(x)$ является линейным преобразованием пространства многочленов с действительными коэффициентами степени не выше двух. Найти матрицу этого линейного преобразования в базисе $e_1 = 1 - x, e_2 = 1 + x, e_3 = x + 2x^2$.
3. Задана матрица линейного преобразования в некотором базисе $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Если возможно, то приведите её к диагональному виду путём перехода к новому базису, в этом случае укажите новый базис и соответствующую ему матрицу.
4. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис линейной оболочки векторов $g_1 = (1, 1, 1, 1), g_2 = (3, 5, -1, -2), g_3 = (-3, 0, 6, 9)$.
5. Для квадратичной формы $K = 5x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 5x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3$ найдите канонический вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду. Выясните, является ли форма знакоопределённой.

Описание технологии проведения:

Текущая аттестация проводится на занятии одновременно во всей учебной группе в виде письменной контрольной работы в течение — 1 часа 35 минут.

Требования к выполнению заданий (или шкалы и критерии оценивания):

Для оценивания контрольной работы используется следующая шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Критерии оценивания:

каждую задачу оцениваем по критерию оценивания решения задачи, при этом оценки 2 заменяем на 0, затем сумму баллов делим на число задач в контрольной работе и получаем среднее значение оценок всех задач — K , далее из следующей таблицы находим оценку контрольной работы

K	Оценка контрольной работы
$K \geq 4,5$	5 (отлично)
$3,5 \leq K < 4,5$	4 (хорошо)
$2,5 \leq K < 3,5$	3 (удовлетворительно)
$K < 2,5$	2 (неудовлетворительно)

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: перечень вопросов и практические задания.

Перечень вопросов для промежуточной аттестации:

1. Поле. (Поле. Простейшие свойства поля. Подполе. Критерий подполя.)
2. Линейное пространство над произвольным полем, его простейшие свойства. Подпространство. Критерий подпространства.
3. Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Признаки линейной зависимости и независимости.
4. Ранг матрицы. Базисный минор, базисные строки и базисные столбцы матрицы. Теорема о базисном миноре и её следствия.
5. База и ранг системы векторов. Критерий базы.
6. Базис линейного пространства. Координаты вектора в базисе и их свойства.
7. Размерность линейного пространства. Связь понятий базиса и размерности. Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса
8. Матрица перехода от одного базиса к другому. Связь координат вектора в различных базисах.
9. Линейная оболочка векторов. (Линейная оболочка векторов. Базис и размерность линейной оболочки. Связь включения или равенства подпространств и соотношения их размерностей.)
10. Сумма и пересечение подпространств.
11. Размерность суммы двух подпространств.
12. Прямая сумма подпространств. Дополнительное подпространство.
13. Линейное многообразие.
14. Изоморфизм линейных пространств. (Свойства изоморфизма. Критерий изоморфности пространств.)

15. Линейный оператор. Свойства линейного оператора.
16. Матрица линейного оператора. Линейное выражение координат образа вектора при линейном отображении. Связь матриц линейного оператора в различных базисах.
17. Сумма операторов, произведение оператора на число, произведение операторов и соответствующие им матрицы.
18. Образ и ядро линейного оператора.
19. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования.
20. Условия приведения матрицы линейного преобразования к диагональному виду. Жорданова форма матрицы линейного преобразования.
21. Определение евклидова и унитарного пространства. Простейшие свойства скалярного произведения.
22. Неравенство Коши–Буняковского. Длина (норма) вектора.
23. Метрическое пространство. Линейно нормированное пространство.
24. Ортогональность.
25. Метод ортогонализации Грама–Шмидта. Построение ортогонального (ортонормированного) базиса.
26. Ортогональная (унитарная) матрица.
27. Матрица Грама.
28. Ортогональное дополнение. Разложение пространства на сумму ортогональных подпространств. Задача о перпендикуляре.
29. Билинейные формы, их свойства и матрицы.
30. Квадратичные формы, их свойства и матрицы. Канонический вид квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

Примеры практических заданий приведены в п. 20.1.

Промежуточная аттестация проводится в виде письменного экзамена (90 минут) и последующего собеседования. Оцениваются результаты обучения по дисциплине (знания, умения, навыки), соотнесённые с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения.

Каждый контрольно-измерительный материал (билет) содержит один теоретический вопрос из перечня вопросов для промежуточной аттестации и два практических задания, аналогичных заданиям п. 20.1. Для получения положительной оценки студент должен ответить на теоретический вопрос билета и решить хотя бы одну практическую задачу.

Для оценивания результатов обучения на экзамене используется следующая шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Студент демонстрирует глубокое знание основных фактов теории и умение доказать более 50% из них, уверенно применяет различные методы и подходы для формализации задач и их решения. Правильно решает сформулированные задачи.	<i>Повышенный уровень</i>	<i>Отлично</i>
Студент демонстрирует знание основных понятий и фактов теории, умение доказать более 20% из них, проводит правильные рассуждения, иногда допуская несущественные неточности. Умеет применять теоретические положения для решения практических задач. При решении задач допускает некоторые неточности.	<i>Базовый уровень</i>	<i>Хорошо</i>
Студент имеет неглубокие теоретические знания, демонстриру-	<i>Пороговый</i>	<i>Удовле-</i>

ет знание основных методов и алгоритмов на частных примерах. Испытывает затруднения в применении теоретических положений при решении практических задач. Решает с погрешностями половину задач.	<i>уровень</i>	<i>твори-тельно</i>
Студент демонстрирует фрагментарные знания или отсутствие знаний, фрагментарные умения или отсутствие умений, фрагментарные навыки или отсутствие навыков. В ответе приводятся бессистемные сведения, относящиеся к поставленному вопросу, но не дающие ответа на него; отсутствует ответ на вопрос или содержание ответа не совпадает с поставленным вопросом. Студент демонстрирует непонимание теоретических основ и базовых понятий курса, не знает методов решения типовых задач и не может их решить.	-	<i>Неудовле-творительно</i>

Порядок формирования КИМ промежуточных аттестаций

Пример контрольно-измерительного материала (2 семестр)

Специальность подготовки 10.05.01 «Компьютерная безопасность»

Дисциплина линейная алгебра

Курс первый Форма обучения очная

Вид аттестации промежуточная

Вид контроля экзамен

Контрольно-измерительный материал № ____

1. Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость и линейная независимость векторов.
2. Даны координаты векторов:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}; b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Линейные оболочки векторов $\{a_1, a_2, a_3\}$ и $\{b_1, b_2, b_3\}$ образуют подпространства L_1 и L_2 соответственно. Найдите базисы суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$.

3. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного преобразования с матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ в некотором базисе.

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностической работы.

Задания этого раздела рекомендуются для использования при проведении диагностической работы с целью проверки сформированности компетенции ОПК 3 (способен на основании совокупности математических методов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности) и индикаторов ОПК-3.10, ОПК-3.11, ОПК-3.12, ОПК-3.13, ОПК-3.14, ОПК-3.15, ОПК-3.1 их достижения. Диагностическая аттестация осуществляется с помощью следующих оценочных средств: перечень заданий.

Перечень заданий.

- 1 Пусть $a = (1, 0, 2), b = (5, 1, -5) \in R^3$. Определите при каких значениях $x \in R$ векторы a и $b - xa$ будут ортогональны? Ответ: $x = 1$.
- 2 Найдите длину вектора $a = (-3, 4, -4, 3) \in R^4$. Ответ: $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
- 3 Пусть $a = (i, 0, z), b = (1, 0, i) \in C^3$. При каких значениях $z \in C$ векторы a и b будут линейно зависимы? Ответ: $z = -1$.
- 4 Пусть векторы a и b евклидова пространства имеют равную длину. Найдите величину скалярного произведения $(a + b, a - b)$. Ответ: 0.
- 5 Найдите собственные значения и собственные векторы линейного преобразования с матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ в некотором базисе. Ответ: собственное значение 2, координаты собственных векторов $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_1 \neq 0$.
- 6 Приведите квадратичную форму $K = x_1^2 + 6x_1x_2 - 7x_2^2$ к нормальному виду. Ответ: $K = y_1^2 - y_2^2$, где $y_1 = x_1 + 3x_2, y_2 = 4x_2$

Требования к выполнению заданий (или шкалы и критерии оценивания):

Критерий оценивания	Шкала оценок
Верный ответ	1 балл
Неверный ответ	0 баллов

Описание технологии проведения.

Диагностическая работа проводится в письменной форме. Она может состоять из 4, 5 или 6 заданий. Каждое задание требует для выполнения 8 мин.

Оценка работы	Критерии оценки
Отлично	Правильно решено не менее 80% заданий
Хорошо	Правильно решено менее 80% и не менее 60% заданий
Удовлетворительно	Правильно решено менее 60% и не менее 40% заданий
Неудовлетворительно	Правильно решено менее 40% заданий